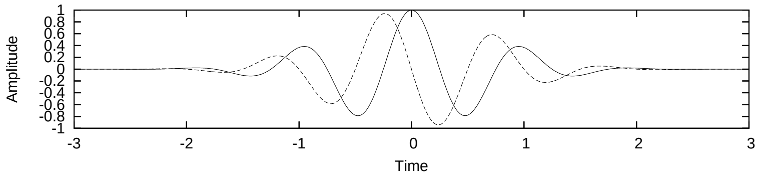
15. DMM
— "Wavelet-Analyse" - Tutorial und Praktische Übungen —



In dieser Veranstaltung sollen die mathematischen Grundlagen der Wavelet-Analyse erklärt und beschrieben werden. Anhand von Beispielen wird die Methode illustriert. Die Teilnehmer sollen auch auf ihrem eigenen Notebook einfache Berechnungen durchführen.

Die entsprechende Software wird Ihnen auf CD-ROM zur Verfügung gestellt.

Wenn Sie an dem Workshop teilnehmen möchten, vermerken Sie dies bitte auf dem Anmeldefomular für die Tagung. Dies erleichtert uns die Vorbereitung

---

Programm

- W. Skrandies – Allgemeine Bedeutung der Wavelet-Analyse bei physiologischen Untersuchungen
- G. Kutyniok – Zeit-/Frequenzanalyse
- T. Sauer – Wavelets und Filterbänke
- A. Klein – Wavelet- und Fourierkohärenz in Theorie und Praxis
- Praktische Übungen (Programme und Beispiele auf CD)

Allgemeines

Nachdem sich das EEG auch als Zeitserie mit verschiedenem Frequenzgehalt darstellen lässt, wurden in der EEG-Forschung bereits sehr früh quantitative Frequenzanalysen durchgeführt (G. Dietsch, 1932). Die Basis dafür waren Bergers Befunde, dass sich die Frequenzen des Ruhe-EEGs bei verschiedenen (Bewußtseins-) Zuständen verändern. Dies wird überlicherweise mit konventionellen mathematischen Verfahren wie der FFT quantifiziert.

Bei solchen Analysen geht man davon aus, dass die bewerteten Signale stationär sind. Diese Voraussetzung ist allerdings nur sehr eingschränkt erfüllt. Ausserdem sind zeitliche Änderungen der Frequenzzusammensetzung hirnelektrischer Aktivität interessant. Diese Information geht jedoch bei der konventionellen FFT verloren. Eine alternative Methoden ist die sog. Kurzzeit-Fourier-Transformation (STFT), bei der ein Analysefenster konstanter Länge schrittweise über die Daten verschoben wird und zu jedem Zeitpunkt das komplexe Spektrum berechnet wird. Damit erhält man Informationen über den Frequenzanteil zu jedem Zeitpunkt. Diese Methode hat jedoch nicht nur rechentechnische Nachteile.

Die Wavelet-Transformation basiert auf den Ideen von A. Haar und wurde Anfang der 1980er Jahre von J. Morlet als praktisches Verfahren entwickelt, bei dem eine Spektralanalyse unter Verwendung verschiedener frequenzangepasster Basisfunktionen (sog. "wavelets") wiederholt über den Analysezeitraum berechnet wird. Solche Wavelet-Analysen finden in vielen verschiedenen Bereichen Anwendung.

Zeit- / Frequenzanalyse

Die klassische Fourieranalyse erkennt zwar perfekt die in einem Signal enthaltenen Frequenzkomponenten, verfügt dafür aber über keinerlei Zeitauflösung. Dies ist für physiologische Messungen nicht unbedingt angebracht: Ein typisches Signal, beispielsweise eine Spindel, klingt nach kurzer Zeit wieder ab. Ziel der Zeit-/Frequenzanalyse ist es nun, auch solche "kurzlebigen" Signale in Zeit und Frequenz zu lokalisieren. Als mathematisches Hilfsmittel bietet sich hierfür die *kontinuierliche Wavelettransformation*

$$W_\psi f(a,b) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\psi\left(\frac{t-a}{b}\right)\,dt,$$

an, die ein Signal f mit einer verschobenen und gestauchten ("dilatierten") Kopie des *Wavelets* ψ korreliert. Der Verschiebungsparameter a entspricht dem *Zeitpunkt*, an dem das Signal ausgewertet wird, der Dilatationsparameter $1/b$ hingegen der *Frequenz*. Das Ergebnis der Wavelettransformation ist ein zweidimensionales, normalerweise farbcodiertes Schema, in dem große Werte ein Auftreten der entsprechenden Frequenz zur entsprechenden Zeit repräsentieren. Wie man es erwarten würde, ist hierbei die Zeitauflösung bei hohen Frequenzen besser als bei niedrigen.

In realistischen Anwendungen kann man allerdings die Wavelettransformation $W_\psi f(a,b)$ nur für *endlich viele* Werte von a und b bestimmen, sagen wir $a \in A$ und $b \in B$. Anders gesagt: berechenbar ist lediglich eine Abtastung der Wavelettransformation. Damit ergibt sich ganz natürlich die Frage, was minimale Wertemengen A und B sind, so daß f aus diesen Abtastwerten rekonstruiert werden kann – man möchte ja schliesslich, daß die Transformation nur f beschreibt und nicht eine ganze Familie von Signalen – und was man durch "Überrepräsentation" gewinnen kann – schließlich ist redundante Information normalerweise robuster gegen Störungen. Dies führt zum Konzept der *"Wavelet–Frames"*.

Wavelets und Filterbänke

Einen diskreteren Zugang zu Wavelets aus der Perspektive der digitalen Signalverarbeitung verfolgt den Ansatz der *Multiresolution Analysis* (MRA), basierend auf einer *verfeinerbaren Funktion* φ, das ist eine Funktion, die sich als Überlagerung "gestauchter" Kopien von sich selbst darstellen lässt. Mittels dieser Überlagerung zerlegt diese Multiskalenmethode ein Signal in einen "groben" Anteil und Detailkorrekturen, wobei die Details normalerweise in jeder Stufe doppelt so hoch aufgelöst werden wie in der vorherigen.

Diese Methode lässt sich nun (mehr oder weniger) direkt auf diskrete Daten übertragen, also Messwerte, die aus Abstastungen gewonnen wurden. Aus der Sicht der Signalverarbeitung entspricht die Zerlegung eines Signals in grobes Signal bzw. Detailkorrekturen einem Hoch- bzw. Tiefpassfilter, gefolgt von einer Dezimierung des Signals – bei beiden Ausgaben wird einfach jeder zweite Wert gelöscht. Umgekehrt lässt sich mittels "Upsampling" (hier wird einfach zwischen zwei Werten eine Null eingefügt), Filterung mit (dualem) Hoch- und Tiefpass und Addition der beiden Teilsignale auch aus der Zerlegung das Originalsignal rekonstruieren. Diese *Filterbänke* lassen sich im wesentlichen mit derselben Komplexität wie die schnelle Fouriertransformation realisieren und stellen daher äußerst effiziente Hilfsmittel zur Signalverarbeitung dar, die man beispielsweise zur Datenkompression, zum Entrauschen oder zur transienten Eckenerkennung verwendet. Lässt man außerdem zur Zerlegung und zur Rekonstruktion unterschiedliche Filter zu, dann kann man mit Hilfe von *biorthogonalen Wavelets* auch symmetrische Filter konstruieren, die Symmetrien im Originalsignal erhalten.

Wavelet- und Fourierkohärenz in Theorie und Praxis

Kohrenz ist eines der populärsten Hilfsmittel in der Biosignalverarbeitung, um (nichjt-kausale) Zusammenhänge und "Kopplung" zwischen Signalen zu quantifizieren. Für eine vernünftige Schätzung der Kohärenz benötigt man stets mehrere Realisierungen eine Zufallsprozesses, hat aber oftmals nur eine Messung, das heißt eine Realisierung, zur Verfügung. In diesem Falle behilft man sich damit, die Messung in Blöcke zu zerlegen und jeden Block als eigene Realisierung des Zufallsprozesses zu betrachten, ein Vorgehen, das allerdings nur dann korrekt ist, wenn es sich um einen *stationären* Zufallsprozess handelt. Gerade bei Messungen in physiologischen Experimenten ist davon aber nicht auszugehen, fast immer hängt die weitere Entwicklung des Prozesses sehr direkt auch vom jeweiligen Zeitpunkt ab.

Dennoch kann man dieses Problem in vielen Fällen umgehen: Bei physiologischen Experimenten wird in der Regel ein- und derselbe Vorgang wiederholt. Lassen sich diese Wiederholungen in den Daten lokalisieren, dann ist es möglich, jedes dieser Einzelexperimente als eigenständige Realsierungen des Zufallsprozesses anzusehen und einen sinnvollen Kohärenzschätzer anzugeben.

Allerdings bleibt bei der klassischen, fourierbasierten Kohärenz ein Problem erhalten, denn bis auf Phasenverschiebungen ist die Fouriertransformierte ja völlig insensitiv gegenüber dem Zeitverlauf. Andererseits ist aber gerade bei Wahrnehmungsexperimenten davon auszugehen, daß sich Kohärenzen zwischen Hirnarealen im zeitlichen Ablauf verändern, weswegen sich auch hier ein Waveletansatz anbietet, durch den sich auch kurzzeitige Kohärenzveränderungen auflösen lassen.

Dieser Workshop findet im Rahmen des **15. Deutschen EEG/EP Mapping Meetings** vom 20.-22.Oktober 2006 statt.

Anmeldung und weitere Information unter
`www.med.uni-giessen.de/physio`
`wolfgang.skrandies@physiologie.med.uni-giessen.de`